XVI Сем. 25-го марта 1894 г. № 8.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

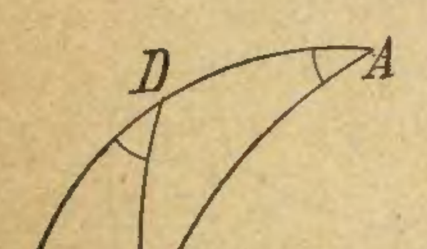
№ 188.

Содержаніе:

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

Возвратимся однако къ сферической геометріи. Отсутствіе параллельныхъ линій на сферѣ исключаетъ также возможность существованія подобныхъ фигуръ. Чтобы въ этомъ убѣдиться, докажемъ, что треугольники, имѣющіе равные углы, тождественны. Положимъ, что въ треугольникахъ ABC и DBE (фиг. 50) углы равны, а стороны одинаково расположены по отношенію къ равнымъ угламъ. Наложимъ △ DBE на △ ABC такъ, какъ это показано на чертежѣ. При этомъ ни одинъ треугольникъ не можетъ оказаться внутри другого, такъ какъ три угла вполнѣ опредѣляютъ собой площадь треугольника. Поэтому, если допустить, что треугольники не конгруэнтны, то сторона DE пересѣчетъ сторону AC въ точкѣ K; при этомъ треугольники DKA и CKE равновелики. Равенство угловъ A и D обусловливаетъ собой равен-



Фиг. 50.

*) См. Вѣстникъ" Оп. Физики "№№ 174, 178, 179, 183 и 187.

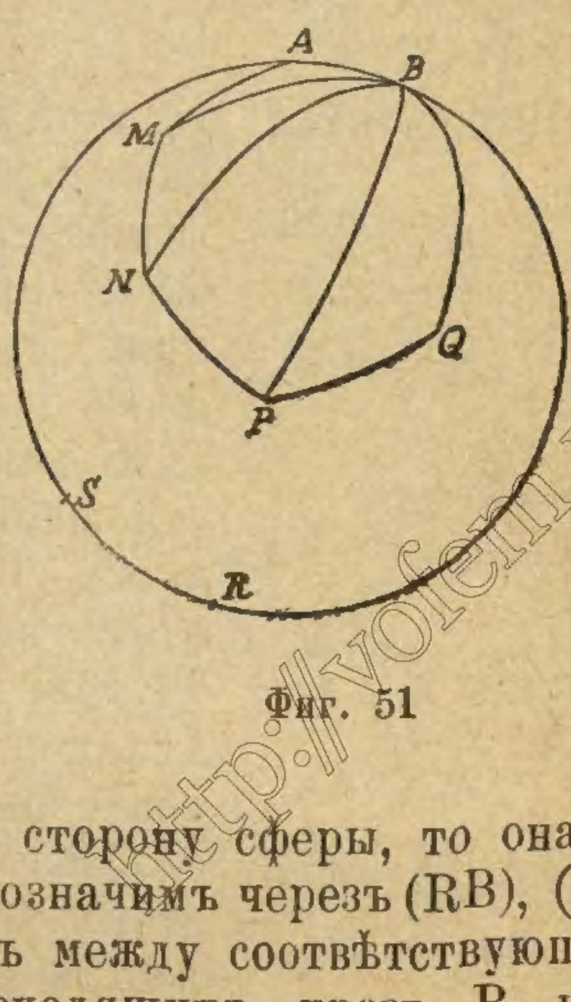
ство сферическихъ двусторонниковъ $ABA'C$ и $DBD'E$. Отбрасывая общую часть $A'DK$, найдемъ, что $\triangle ADK = \triangle A'D'K$. Равенство это противорѣчитъ равновеликости треугольниковъ ADK и CKE. Слѣдовательно, треугольники DBE и ABC конгруэнтны. Случай симметріи разсматривается по общему методу, указанному выше.

Однако на пропорціональности линій существенно основывается въ евклидовой геометріи измѣреніе линій и площадей. Намъ остается поэтому показать, какъ рѣшается этотъ вопросъ въ сферической геометріи. Обратимся для этого къ соотношеніямъ между сторонами въ сферическомъ треугольникѣ.

Мы уже упоминали, что каждому выпуклому сферическому треугольнику соотвѣтствуетъ трегранный уголъ при центрѣ. Доказательство извѣстнаго предложенія, что сумма двухъ плоскихъ угловъ въ трегранномъ углѣ больше третьяго, не зависитъ отъ постулата Евклида. Очевидно, это предложеніе можно перефразировать такимъ образомъ: сумма двухъ сторонъ выпуклаго сферическаго треугольника больше третьей. Ясное дѣло, что теорема остается справедливой и для вогнутаго треугольника, если отнесемъ предложеніе къ одной изъ тѣхъ сторонъ, которыя меньше π. Можно поэтому сказать: во всякомъ сферическомъ треугольникѣ сторона, не превышающая π, меньше суммы двухъ другихъ сторонъ.

Ломанной линіей на сферѣ называютъ такую, которая состоитъ изъ дугъ большихъ круговъ. Изъ предыдущаго предложенія вытекаетъ, что дуга большого круга, проходящая между двумя точками и не превышающая π, всегда короче всякой ломанной, проходящей на сферѣ между тѣми же точками. Хотя предложеніе доказывается аналогично соотвѣтствующему предложенію плоской геометріи, мы его все-таки приведемъ, такъ какъ здѣсь приходится дѣлать нѣкоторыя оговорки.

Предположимъ сначала, что ломанная лежитъ цѣликомъ на одной половинѣ сферы, опредѣляемой кругомъ $ABSR$. (Фиг. 51). Дуги MB, NB.... не превышаютъ π, ибо въ противномъ случаѣ ломанная перешла бы на другую сторону сферы. Поэтому имѣемъ:



Фиг. 51

$$MB + AM > AB$$
$$NB + MN > MB$$
$$PB + PN > NB$$
$$. \; , \; . \; . \; . \; .$$

Сложивъ эти неравенства мы получимъ, по удаленіи общихъ слагаемыхъ,

$$AM + MN + PN + \ldots > AB.$$

Если ломанная переходитъ на другую сторону сферы, то она пересѣкаетъ кругъ AB въ точкахъ R и S. Обозначимъ черезъ (RB), (RS), (SA) тѣ части ломанной, которыя проходятъ между соотвѣтствующими точками; черезъ RS ту изъ двухъ дугъ, проходящихъ чрезъ R и S, которая меньше π. Тогда на основаніи предыдущаго имѣемъ.

$$(AS) + SR + (RB) > AB$$
$$(RS) > RS$$

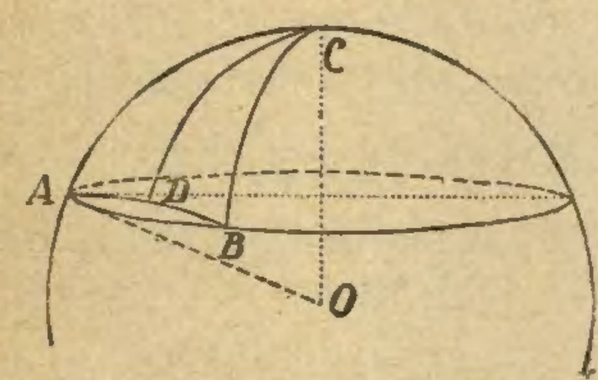
откуда послѣ сложенія и сокращенія

$$(AS) + (RS) + (RB) > AB.$$

Длиной кривой линіи на сферѣ называютъ предѣлъ вписанной въ нее ломанной, когда стороны послѣдней безпредѣльно убываютъ. Такъ какъ длина ломанной при этомъ постоянно возрастаетъ, оставаясь больше дуги большого круга, проходящей между конечными точками кривой и не превышающей π, то послѣдняя короче кривой. Это предложеніе формулируютъ обыкновенно слѣдующимъ образомъ:

Дуга большого круга, соединяющая двѣ точки на сферѣ и не превышающая π, представляетъ собой кратчайшее разстояніе между этими двумя точками.

Изъ кривыхъ линій на сферѣ мы разсмотримъ геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на равномъ разстояніи ϱ отъ нѣкоторой неподвижной точки C. Эта кривая называется сферической окружностью. Не трудно убѣдиться, что сферическая окружность представляетъ собой окружность плоскаго круга; для этого достаточно замѣтить, что ее описываетъ точка A сектора ACO при вращеніи вокругъ OC. (Фиг. 52). Разстояніе точекъ этой окружности отъ полюса C′ точки C, очевидно, представляетъ собой постоянную величину $\pi - \varrho$; поэтому каждая сферическая окружность имѣетъ два центра въ двухъ противоположныхъ полюсахъ сферы. Когда радіусъ окружности достигаетъ $\frac{1}{2}\pi$, то сферическая окружность совпадаетъ съ геодезической линіей поверхности. Мы не станемъ доказывать, что всякая сферическая окружность вполнѣ опредѣляется тремя точками, не лежащими на одной окружности большого круга,—что свойства прямолинейныхъ касательныхъ переносятся на сферу, и т. д., ибо всѣ эти доказательства представляютъ собой только перефразировку планиметрическихъ доказательствъ. Займемся только опредѣленіемъ длины сферической окружности. Мы будемъ при этомъ пользоваться формулами сферической тригонометріи. Изслѣдованія Лобачевскаго, какъ мы въ этомъ убѣдимся ниже, обнаруживаютъ, что сферическая тригонометрія не зависитъ отъ евклидова постулата. Правда, самое опредѣленіе тригонометрическихъ функцій находится въ связи съ постулатомъ Евклида; но мы можемъ покамѣстъ смотрѣть на нихъ, какъ на величины, имѣющія опредѣленное аналитическое значеніе. Для опредѣленія длины окружности впишемъ въ нее правильный многоугольникъ о n сторонахъ, гдѣ n число весьма большое (Фиг. 52). Соединивъ его вершины съ центромъ окружности, разобьемъ его на n равнобедренныхъ треугольниковъ. Середину D одной изъ сторонъ соединимъ съ центромъ и тогда получимъ прямоугольный треугольникъ ADC, въ которомъ гипотенуза равна радіусу ϱ, уголъ при вершинѣ $\frac{\pi}{n}$, меньшій катетъ равенъ половинѣ стороны $\frac{\varphi}{2}$, слѣдовательно



Фиг. 52.

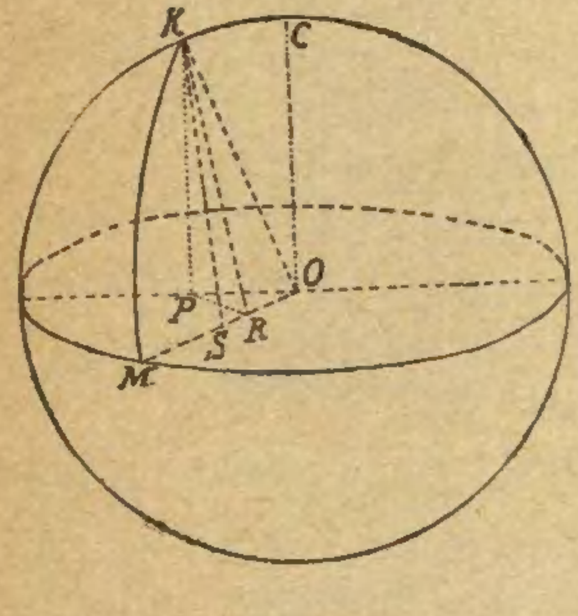
$$\operatorname{sn}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sn}\varrho \operatorname{sn}\frac{\pi}{n}.$$

Для весьма малыхъ значеній $\frac{\varphi}{2}$ и $\frac{\pi}{n}$ синусы можно замѣнить ихъ аргументами, какъ безконечно малыми того же порядка,—откуда

$$n\varphi = 2\pi \operatorname{sn}\varrho; \lim(n\varphi) = C = 2\pi \operatorname{sn}\varrho$$

$$C = \pi \frac{e^{\varrho i} - e^{-\varrho i}}{i}.$$

Займемся теперь опредѣленіемъ разстоянія точки отъ окружности большого круга. Если точка совпадаетъ съ полюсомъ окружности, то всѣ дуги, соединяющія ее съ точкой на окружности, перпендикулярны къ послѣдней и равны $\frac{1}{2}\pi$. Въ этомъ смыслѣ говорятъ, что полюсъ отстоитъ отъ окружности соотвѣтствующаго большого круга на разстояніе, равное $\frac{1}{2}\pi$. Разсмотримъ теперь точку K (фиг. 53), не совпадающую съ полюсомъ окружности. Проведемъ къ послѣдней перпендикуляръ KL меньшій $\frac{1}{2}\pi$ и наклонную KM. Не трудно видѣть, что $KL < KM$. Опустивъ изъ K перпендикуляръ KP на OL, проводимъ $PR \perp OM$, такъ что $OR < OP$; отложивъ затѣмъ $OS = OP$, найдемъ, что $KS > KR > KP$. Слѣдовательно, въ треугольникахъ KOS и KOP, имѣющихъ двѣ соотвѣтственно равныя стороны, противъ большей стороны KS лежитъ большій уголъ, а потому $KL < KM$. Слѣдовательно, дуга KL представляетъ собой кратчайшее разстояніе отъ точки K до окружности большого круга; она и принимается за разстояніе точки отъ этой окружности.



Фиг. 53.

Геометрическое мѣсто точекъ, которыя на нѣкоторой поверхности находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ нѣкоторой геодезической линіи этой поверхности, называется „*линіей равныхъ разстояній*“. Такъ въ евклидовой геометріи линіей равныхъ разстояній является прямая параллельная данной. Разсмотримъ линію равныхъ разстояній на сферѣ. Точки, находящіяся на разстояніи ϱ отъ нѣкоторой окружности большого круга, находятся на постоянномъ разстояніи $\frac{1}{2}\pi - \varrho$ отъ полюсовъ этой окружности; поэтому линіей равныхъ разстояній на сферѣ служитъ сферическая окружность; центрами послѣдней являются полюсы большого круга, отъ окружности котораго отсчитываются разстоянія. Такъ какъ окружность сѣчетъ ортогонально всѣ радіусы,—то можно сказать, что линія равныхъ разстояній на сферѣ ортогональна къ системѣ перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ точекъ окружности большого круга, отъ которой считаются эти разстоянія. Или иначе: линіи равныхъ разстояній представляютъ собой систему ортогональныхъ траэкторій окружностей большихъ круговъ, перпендикулярныхъ къ той окружности отъ

которой отсчитываются разстоянія. Это свойство принадлежитъ также линіямъ равныхъ разстояній на евклидовой плоскости. Гауссомъ было доказано, что это свойство линій равныхъ разстояній имѣетъ мѣсто на всякой поверхности, *) но доказательство основано на евклидовой геометріи. Мы видимъ, что это свойство линій равныхъ разстояній принадлежитъ также сферической геометріи,—и убѣдимся ниже, что оно переходитъ въ неевклидову геометрію.

Намъ остается заняться опредѣленіемъ площадей сферическихъ фигуръ. Мы уже видѣли, что площадь сферическаго треугольника равна $\frac{1}{2}(s-\pi)$, гдѣ s есть сумма угловъ въ треугольникѣ. Сферическій многоугольникъ діогоналями, выходящими изъ вершины, дѣлится на $(n-2)$ сферическихъ треугольника; поэтому двойная площадь его равна

$$\sum(s-\pi)=\sum s-(n-2)\pi=S-(n-2)\pi$$

гдѣ S есть сумма угловъ многоугольника **). Площадь криволинейной фигуры опредѣляется, какъ предѣлъ площадей вписанныхъ въ нихъ многоугольниковъ. Займемся опредѣленіемъ площади сферическаго круга. Впишемъ въ него, какъ выше, (фиг. 52) правильный n—угольникъ. Изъ треугольника DBC опредѣляемъ $\angle DBC=\alpha$ при помощи уравненія

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\cos\varrho \text{ или } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\cos\varrho$$

или, замѣняя tangens'ы безконечно малыхъ дугъ $\frac{\pi}{2}-\alpha$ и $\frac{\pi}{n}$ ихъ аргументами, получимъ

$$\frac{1}{2}(\pi-2\alpha)=\frac{\pi}{n}\cos\varrho.$$

Откуда

$$2\alpha+\frac{2\pi}{n}-\pi=s=\frac{2\pi}{n}(1-\cos\varrho),$$

гдѣ s есть площадь $\triangle$ ABC; откуда площадь правильнаго многоугольника

$$S=ns=2\pi(1-\cos\varrho)=4\pi\operatorname{sn}^2\frac{\varrho}{2}.$$

Наконецъ, въ предѣлѣ для площади круга

$$\sigma=4\pi\operatorname{sn}^2\frac{\varrho}{2}=-\pi\left(e^{\frac{\varrho i}{2}}-e^{-\frac{\varrho i}{2}}\right)^2.$$

При изложеніи элементовъ сферической геометріи, мы пользовались, какъ въ доказательствахъ, такъ и въ опредѣленіяхъ сферическихъ образовъ стереометрическими представленіями. Иными словами

*) См. „Disquisitiones generales circa superficies curvas". XVI.

**) Лобачевскій доказываетъ при помощи этого предложенія теорему Эйлера и основываетъ на ней теорію правильныхъ многогранниковъ.

сфера являлась у насъ образомъ двухъ измѣренiй въ трехмѣрномъ пространствѣ. Можно было бы однако слѣдовать совершенно иному пути. Можно было бы начать съ того, что на сферѣ существуютъ линейные образы, называемые геодезическими линiями, которые могутъ быть всѣ приведены въ совмѣщенiе наложенiемъ. Эти линiи обладаютъ слѣдующими свойствами: всѣ онѣ замкнуты; двѣ геодезическiя линiи, проходящiя чрезъ одну точку, имѣютъ еще одну и только одну общую точку на сферѣ, называемую полюсомъ первой точки. Эти свойства необходимо разсматривать, какъ элементы опредѣленiя окружности большого круга. Далѣе нужно было указать условiя, при которыхъ возможны передвиженiя сферическихъ фигуръ; т. е. ввести основной принципъ, по которому движенiе сферической фигуры возможно, пока она заключаетъ не болѣе одной неподвижной точки; двѣ неподвижныя точки уже вполнѣ опредѣляютъ положенiе фигуры на сферѣ, если онѣ не совпадаютъ съ противоположными полюсами сферы; при двухъ неподвижныхъ полюсахъ движенiе фигуры возможно, пока мы ея не фиксируемъ, закрѣпивъ третью точку. Затѣмъ можно было опредѣлить уголъ либо какъ часть сферы, заключающуюся между двумя геодизическими линiями, либо при помощи сферической окружности, по аналогiи съ опредѣленiемъ прямолинейнаго угла. Далѣе, слѣдуя тому-же методу и установивъ надлежащее число основныхъ принциповъ, можно было бы развить всю систему сферической геометрiи, не выходя за предѣлы сферы. При этомъ сфера являлась бы пространствомъ двухъ измѣренiй. Именно этому пути слѣдовали бы двумѣрные математики Гельмгольца при построенiи своей геометрiи. Мы держались общепринятой системы, какъ болѣе простой; но считаемъ все таки нужнымъ выяснить читателю, что геометрiя каждой поверхности можетъ быть построена независимо отъ третьяго измѣренiя. Разница будетъ заключаться лишь въ томъ, что основныя свойства геодезическихъ линiй и условiя передвиженiя фигуръ по этой поверхности,—словомъ тѣ положенiя, для доказательства которыхъ мы неизбѣжно прибѣгаемъ къ третьему измѣренiю, будутъ служить основными принципами, характеризующими собой поверхность и ея геометрiю.

Заканчивая главу, мы позволимъ себѣ указать ту цѣль, которую мы имѣли въ виду, развивая довольно подробно сферическую геометрiю. Геометрiя на поверхности шара представляетъ собой уклоненiе отъ геометрiи Евклида въ одну сторону: постулатъ Евклида нарушается въ томъ смыслѣ, что параллельныхъ геодезическихъ линiй вовсе не существуетъ, а сумма угловъ въ треугольникѣ всегда превышаетъ π. Намъ казалось, что ознакомленiе съ ней сдѣлаетъ болѣе доступнымъ уклоненiе отъ той-же системы въ другую сторону. Далѣе для насъ было существенно важно выдвинуть два момента: обнаружить, съ одной стороны, что наложенiе плоскихъ фигуръ другой стороной,—методъ къ которому мы постоянно прибѣгаемъ въ планиметрiи,—не играетъ существенной роли съ формальной точки зрѣнiя, ибо онъ можетъ быть вполнѣ замѣненъ идеей симметрiи; съ другой стороны, мы считали необходимымъ констатировать, что сферическая геометрiя, не смотря на всѣ ея отступленiя отъ геометрiи Евклида, сводится къ послѣдней въ предположенiи безконечно малыхъ фигуръ.

Еще одно обстоятельство существенно важно. Мы видѣли во введенiи, что геометрiя, основанная на методѣ наложенiя, возможна только

на поверхностяхъ постоянной кривизны. Евклидова геометрія характеризуетъ собой поверхности нулевой кривизны. Геометрія сферы характеризуетъ собой всѣ поверхности постоянной положительной кривизны, такъ какъ мы видѣли, что всякая поверхность постоянной положительной кривизны $\left(\frac{1}{R}\right)$ развертывается на шаръ радіуса R. Чтобы составить себѣ представленія о формѣ этихъ поверхностей, достаточно вообразить, что въ сферическомъ вырѣзкѣ сведены края. Однако, всѣ соображенія Гаусса, а слѣдовательно и его критерій, существенно зависятъ отъ геометріи Евклида. Какъ видоизмѣняется этотъ вопросъ съ точки зрѣнія абсолютной геометріи, мы увидимъ ниже; покамѣстъ замѣтимъ только, что допущеніе того или другого постулата на плоскости можетъ отразиться только на аналитическомъ признакѣ, относящемъ данную поверхность къ той или другой группѣ. Въ самомъ дѣлѣ, сферическая геометрія не зависитъ отъ постулата Евклида. Слѣдовательно всѣ поверхности, которыя на нее развертываются сохраняютъ свою геометрію. Подготовивъ почву, перейдемъ теперь къ той теоріи, которая составляетъ центръ тяжести всего ученія Лобачевскаго.

В. Каганъ (Одесса).

(Продолженіе слѣдуетъ).

НѢСКОЛЬКО СЛОВЪ

къ вопросу объ отраженіи свѣта въ вогнутомъ зеркалѣ.

Какъ извѣстно, при незначительномъ отверстіи вогнутаго сферическаго зеркала и для центральныхъ лучей, имѣетъ мѣсто слѣдующая зависимость между разстояніемъ d свѣтящейся точки до середины зеркала, разстояніемъ f ея сопряженнаго фокуса до той же середины и главнымъ фокуснымъ разстояніемъ F:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I).$$

Принимая въ этомъ уравненіи d и f за перемѣнныя величины, а $\frac{1}{F}=m$, за постоянное количество, не трудно показать, что это есть уравненіе равнобочной гиперболы, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, коихъ начало въ одной изъ вершинъ кривой. Если это начало помѣстить въ серединѣ зеркала и направить одну изъ координатныхъ осей, горизонтальную, по главной оптической оси зеркала, то центръ кривой окажется на перпендикулярѣ, возставленномъ къ главной оптической оси изъ главнаго фокуса зеркала, въ разстояніи отъ главной оптической оси, равномъ главному фокусному разстоянію даннаго вогнутаго зеркала.

Оси кривой составятъ съ главною отпическою осью зеркала уголъ въ 45° и равны каждая діагонали квадрата, коего сторона равна по

длинѣ двойному главному фокусному разстоянію даннаго вогнутаго зеркала.

Въ самомъ дѣлѣ, наше уравненіе (I) по перенесеніи начала въ точку, коей координаты a и b, приметъ видъ

$$\frac{1}{d+a}+\frac{1}{f+b}=m,$$

или послѣ упрощеній:

$$mfd+(ma-1)f+(mb-1)d=a+b-mab.$$

Но если новыя оси должны служить осями симметріи нашей кривой, то въ предыдущемъ уравненіи слѣдуетъ приравнять нулю коэффиціенты при нечетныхъ степеняхъ неизвѣстныхъ, то есть принять

$$ma=1 \text{ и } mb=1, \text{ или}$$

$$a=b=\frac{1}{m}=\mathrm{F}.$$

При этомъ условіи уравненіе нашей кривой, отнесенной къ новой системѣ осей, приметъ видъ:

$$mfd=\frac{1}{m} \text{ или}$$

$$fd=\mathrm{F}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II)}.$$

Не трудно видѣть, что уравненіе II принадлежитъ гиперболѣ, для которой новыя оси служатъ ассимптотами. Чтобы найти направленіе и величину осей нашей гиперболы, повернемъ ассимптоты на уголъ α и назовемъ новыя координаты какой либо точки кривой f_1 и d_1 и пусть этимъ координатамъ соотвѣтствуютъ ассимптотическія координаты f и d; тогда, принимая во вниманіе, что:

$$f=f_1\,\mathrm{cs}\alpha-d_1\,\mathrm{sn}\alpha \text{ и}$$

$$d=d_1\,\mathrm{cs}\alpha+f_1\,\mathrm{sn}\alpha,$$

послѣ подстановки этихъ значеній для f и d въ уравненіе II, получимъ окончательно:

$$\mathrm{sn}\,2\alpha(f_1^2-d_1^2)+2\mathrm{cs}\,2\alpha f_1 d_1=2\mathrm{F}^2. \quad . \; . \; . \quad \text{(III)}.$$

Такъ какъ новыя координатныя оси должны служить вмѣстѣ съ тѣмъ и осями нашей гиперболы, то въ уравненіи III необходимо положить

$$\mathrm{cs}\,2\alpha=0,$$

что равносильно положенію

$$\alpha=45^0.$$

При этомъ положеніи:

$$\mathrm{sn}\,2\alpha=1,$$

и уравненіе III принимаетъ видъ:

$$f_1^2-d_1^2=2\mathrm{F}^2, \text{ или}$$

$$\frac{f_1^2}{2F^2}-\frac{d_1^2}{2F^2}=1 \text{ . . . . } (IV).$$

Сравнивая полученное уравненіе IV съ уравненіемъ гиперболы, отнесенной къ ея осямъ, то есть съ уравненіемъ:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

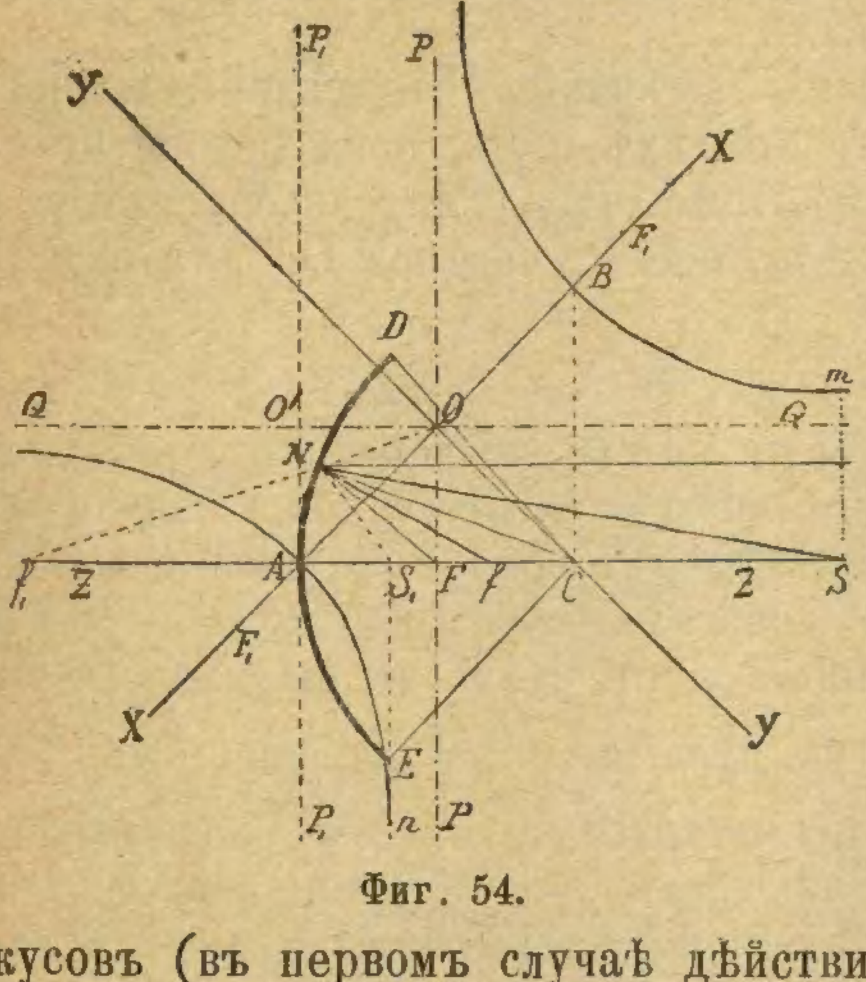
видимъ, что

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}=\frac{1}{2F^2},$$

то есть, что оси нашей гиперболы равны между собою и каждая равна $2F\sqrt{2}$.

На основаніи этого заключаемъ, что кривая, представляющая зависимость между тремя величинами f, d и F, выражаемую уравненіемъ I, есть равнобочная гипербола, которой оси равны каждая діагонали квадрата со стороною, равною 2F.

На чертежѣ DAE (фиг. 54) есть вогнутое зеркало съ отверстіемъ DCE; ZZ его главная оптическая ось; F главный фокусъ; C центръ кривизны; A середина.



Фиг. 54.

O центръ гиперболы; AB ея дѣйствительная ось; PP и QQ ассимптоты; P_1P_1 и ZZ оси координатъ гиперболы для случая, когда координаты какой нибудь ея точки f и d удовлетворяютъ уравненію:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

S и S_1, два положенія свѣтящейся точки на главной оптической оси; f и f_1, соотвѣтствующія имъ положенія сопряженныхъ фокусовъ (въ первомъ случаѣ дѣйствительнаго, а во второмъ — мнимаго), при томъ для d=AS и d_1=AS_1 (абсциссамъ гиперболы), f=mS и f_1 = nS_1 (ординаты гиперболы). Дальнѣйшія поясненія излишни.

Очевидно, что при преломленіи лучей въ чечевицахъ, зависимость между f, d и F для собирающихъ линзъ представляетъ также гиперболическую функцію при условіи центральныхъ лучей и незначительной толщины линзы.

С. Стемпневскій (Пермь).

ИЗЪ ОБЛАСТИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ.

Къ вопросу о нѣкоторыхъ случаяхъ дѣлимости многочленовъ.

Въ учебникахъ начальной алгебры, обыкновенно, вслѣдъ за разсмотрѣніемъ вопроса о дѣленіи многочленовъ, упоминается о замѣчательныхъ случаяхъ дѣленія, подъ чѣмъ разумѣютъ дѣлимость $x^m - a^m$ на $x-a$; $x^m + a^m$ на $x+a$, при m нечетномъ и т. д.

Въ существующихъ учебникахъ приводятся двоякаго рода доказательства упомянутой дѣлимости. Цѣль нашей статьи заключается въ указаніи недостатковъ приводимыхъ доказательствъ, и въ изложеніи затронутаго вопроса вполнѣ доступно для начинающихъ, и притомъ строго-научно.

Обыкновенно доказательству дѣлимости $x^m - a^m$ на $x-a$ предпосылаютъ теорему.

„Многочленъ цѣлый относительно x и расположенный по убывающимъ степенямъ этой буквы: $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + K$, при дѣленіи на $x-a$, гдѣ a положит. или отрицат. число, даетъ въ остаткѣ многочленъ: $Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \cdots + K$, который получится изъ дѣлимаго, если въ немъ x замѣнимъ на a“. (См. напр. учеб. алгебры Киселева, Давидова, Бертрана и проч.).

При доказательствѣ этой теоремы замѣчаютъ, что дѣленіе даннаго многочл. на $x-a$ можно продолжать до тѣхъ поръ, пока не получится остатокъ, не содержащій буквы x (потому что дѣлитель содержитъ x лишь въ первой степени). Называя дѣлимое P, частное Q, остатокъ R, пишутъ равенство:

$$P = Q(x-a) + R;$$

далѣе замѣчаютъ о тождественности этого равенства при всякомъ значеніи x, а слѣдов. и при $x=a$, откуда и получаютъ $R = P$, т. е. данному многочлену, въ которомъ x замѣненъ черезъ a. Относительно приведеннаго доказательства необходимо замѣтить, что при $x=a$ дѣлитель обращается въ нуль, и мы имѣемъ такимъ образомъ дѣло съ дѣленіемъ на нуль, т. е. съ выраженіемъ $\frac{P_1}{0}$, о которомъ начинающіе изучать алгебру понятія не имѣютъ; да и вообще необходимо всегда быть крайне осторожнымъ, въ особенности въ началѣ обученія, съ умноженіемъ и дѣленіемъ на выраженія, могущія обратиться въ нуль.

Въ „Начальной алгебрѣ г. Матковскаго“ тотъ же вопросъ излагается иначе и не влечетъ къ приведенному недоразумѣнію. Теорема Безу: „разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится на разность основаній“, доказывается повѣркой, черезъ умноженіе частнаго, которое представляетъ однородный полиномъ $(n-1)$-й степени, расположенный по убывающимъ степенямъ x, на дѣлителя; но вслѣдствіе употребленнаго способа повѣрки доказательство нельзя вполнѣ одобрить; далѣе доказывается теорема Декарта, сооставляющая обобщеніе теоремы Безу, и встрѣчающаяся въ геометріи Декарта въ XVII вѣкѣ: „Разность между цѣлымъ полиномомъ n-ой степени $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + hx + K$ и значеніемъ его при $x = t$, т. е. разность:

$$(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + hx + K) - (at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \cdots + ht + K)$$

дѣлится на двучленъ $x - t$. Частное есть цѣлый полиномъ $(n-1)$-ой степени". Если обозначимъ данный полиномъ черезъ $f(x)$, значеніе его при $x = t$ черезъ $f(t)$, то приведенная теорема Декарта можетъ быть записана такъ:

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a_1 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \cdots + h_1;$$

изъ этого равенства имѣемъ

$$\frac{f(x)}{x - t} = a_1 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \cdots + h_1 + \frac{f(t)}{x - t}.$$

А это равенство и показываетъ, что если раздѣлимъ $f(x)$, т. е. полиномъ цѣлый относительно x, на двучленъ первой степени $x - t$, то получимъ въ остаткѣ $f(t)$ т. е. многочленъ, представляющій значеніе даннаго полинома при $x - t$.

Въ большинствѣ учебниковъ алгебры дѣлимость разности $x^m - a^m$ на $x - a$ доказывается непосредственнымъ дѣленіемъ, и черезъ наблюденіе состава полученныхъ остатковъ; этотъ то способъ доказательства мы и рекомендуемъ, только для приданія полной строгости доказательству считаемъ необходимымъ убѣдить, что если замѣченное правило составленія остатка справедливо для какого нибудь К-го остатка, то будетъ справедливо и для $K + 1$-го остатка; т. е. тутъ необходимо употребить способъ доказательства Бернулли т. е. заключенія отъ К къ $K + 1$ *).

Указавши на составъ остатковъ пишемъ напр. 5-й остатокъ: $a^5 x^{m-5} - a^m$; предполагаемъ, что К-й составляется по замѣченному закону т. е. будетъ $a^k x^{m-k} - a^m$; ищемъ $(K + 1)$-й, дѣлимъ 1-й членъ К-го остатка на 1-й членъ дѣлителя, полученный членъ частнаго $a^k x^{m-k-1}$ умножаемъ на дѣлителя $x - a$, и вычитаемъ изъ К-го остатка, получаемъ $(K+1)$-й остатокъ: $a^{k+1} x^{m-k-1} - a^m$, откуда и заключаемъ объ общности правила составленія остатковъ.

Доказавши такимъ образомъ строго и понятно теорему Безу, вполнѣ возможно привести Декартову теорему, и вывести слѣдствіе насчетъ остатка отъ дѣленія многочл. $f(x)$ на двучленѣ вида $x - t$, гдѣ $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + hx + K$, и, наконецъ, вывести признакъ дѣлимости упомянутаго многочлена на двучленъ $x - t$. [Для чего необходимо, чтобы $f(t) = 0$, не дѣлая $x = t$ въ дѣлителѣ, какъ то полагаютъ въ практикуемомъ, выше приведенномъ способѣ доказательства]. Какъ частный случай слѣдствія Декартовой теоремы можно въ свою очередь получить теорему Безу.

Вл. Шидловскій (Полоцкъ).

---

*) Нѣсколько сходное съ приводимымъ ниже доказательство было помѣщено въ № 41 „Вѣстника". См. *И. Ивановъ*: „Одно изъ доказательствъ теоремы Безу", сем. IV, стр. 106—107. *Ред.*

ПРЕПОДАВАНІЕ ЧЕРЧЕНІЯ ВЪ РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩАХЪ.*)

Новыми учебными планами (утвержденными Г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія въ 1888 г.) преподаванію черченія въ реальныхъ училищахъ дано иное противъ прежняго направленіе. Именно техническая, такъ сказать, сторона черченія почти совершенно вытѣснена черченіемъ геометрическимъ: должно учениковъ обучать умѣнью рѣшать геометрическія задачи на построеніе и ихъ вычерчиванію. Касательно этого (т. е. черченія техническаго и геометрическаго) я и намѣренъ высказать свои соображенія, вытекающія изъ нѣкоторой пріобрѣтенной мною опытности относительно преподаванія этого предмета.

Мнѣ кажется, что технической сторонѣ дѣла удѣлено теперь очень мало времени. На это отдѣлено всего только два урока въ недѣлю въ III-мъ классѣ. Начиная же съ IV-го класса и кончая VI-мъ, все почти время (въ этихъ классахъ также по два урока черченія) посвящено обученію учениковъ рѣшать геометрическія задачи на построеніе; на вычерчиваніе рѣшенныхъ учениками задачъ полагается только четверть времени, назначеннаго разсматриваему предмету въ этихъ классахъ, причемъ въ VI-мъ кл. для рѣшенныхъ задачъ считается излишнимъ вычерчиваніе тушью;—послѣднее должно состоять въ построеніи (и вычерчиваніи тушью) по точкамъ коническихъ сѣченій и архимедовой спирали. Ученики изучаютъ техническое черченіе и упражняются въ немъ въ III-мъ классѣ, а между тѣмъ отъ поступающихъ въ высшія техническія учебныя заведенія требуется основательное знакомство съ технической стороною дѣла, требуется навыкъ исполнять гораздо болѣе трудные, гораздо болѣе сложные чертежи, въ сравненіи съ тѣми, которые ученикамъ приходилось чертить. Въ виду этого, времени, отведеннаго въ реальныхъ училищахъ технической сторонѣ черченія, едва-ли достаточно для основательнаго знакомства съ предметомъ, важность котораго не подлежитъ сомнѣнію.

Что касается черченія въ VII-мъ классѣ, то оно должно быть здѣсь такъ называемымъ проэктивнымъ, и времени (два урока въ недѣлю), мнѣ кажется, совершенно достаточно для выполненія программы, намѣченной министерствомъ для этого класса.

Считаю умѣстнымъ упомянуть, что, согласно новымъ требованіямъ, преподаваніе черченія въ IV-мъ, V-мъ и VI-мъ классахъ должно быть ведено такимъ образомъ, чтобы ученики, окончивъ VI-й кл., были въ состояніи рѣшать *самостоятельно* задачи, подобныя по трудности задачамъ, приводимымъ въ новыхъ примѣрныхъ программахъ реальныхъ училищъ. Въ высшей степени трудно привести учениковъ къ такому умѣнью. Быть можетъ, лучшіе ученики и будутъ въ состояніи рѣшать *самостоятельно* подобныя задачи, но относительно среднихъ учениковъ это, по моему мнѣнію, недостижимо.

Изъ всего мною раньше высказаннаго слѣдуетъ, что времени, отведеннаго въ реальныхъ училищахъ черченію, недостаточно для того, чтобы ученики выучились хорошо рѣшать геометрическія задачи на построеніе, и недостаточно этого времени для того, чтобы приготовить тѣхъ воспитанниковъ, которые намѣрены поступить въ высшія спеціальныя учебныя заведенія, къ выполненію болѣе или менѣе трудныхъ техническихъ чертежей.

Теперь скажу нѣсколько словъ о томъ, какъ въ реальныхъ училищахъ надо, по моему мнѣнію, вести преподаваніе черченія, чтобы выполнить (если это возможно) министерскія требованія относительно этого предмета.

Обученію технической сторонѣ черченія посвящается здѣсь курсъ III-го класса. Вести дѣло надо такъ, чтобы ученики получили возможность исполнять чертежи болѣе или менѣе техническаго характера. Въ этомъ классѣ ученики должны получить знакомство съ чертежными инструментами, съ умѣньемъ ими пользоваться;

---

*) **Помѣщая настоящую замѣтку, редакція „Вѣстника Оп. Физики" приглашаетъ гг. преподавателей высказаться по затрагиваемымъ авторомъ замѣтки вопросамъ. Вопросы эти: возможно ли выполнить программу по черченію въ отведенное ему время и какъ цѣлесообразнѣе всего распредѣлить матерьялъ, принадлежатъ именно къ числу такихъ, для рѣшенія которыхъ всѣ данныя находятся въ рукахъ преподавателей.**

Ред.

кромѣ того ученики исполняютъ здѣсь вычерчиваніе различныхъ паркетовъ, узоровъ и т. д.; здѣсь же ученики должны вычерчивать различные овалы, валюты и проч. Оканчивая III-й классъ ученики должны пріобрѣсти нѣкоторый навыкъ или, скорѣе, подготовку къ болѣе трудному техническому черченію.

Курсы IV-го, V-го и VI-го классовъ посвящены исключительно черченію геометрическому.

Мнѣ кажется, что было бы преждевременно употреблять первое полугодіе учебнаго года IV-го класса на *систематическое* прохожденіе способовъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. Первое полугодіе этого курса, когда для учениковъ только что начинается знакомство съ геометріею, имъ возможно рѣшать только самыя легкія задачи на построеніе; въ это время ученики едва-ли имѣютъ ясное и отчетливое представленіе о томъ, что такое геометрическія задачи на построеніе. Мнѣ, имѣющему нѣсколько лѣтъ практики преподавателя, извѣстно, насколько ученику, только что приступившему къ изученію геометріи, трудно справляться съ этими задачами: умъ ученика еще не успѣлъ хорошо освоиться съ геометрическимъ мышленіемъ, съ геометрическимъ языкомъ. Поэтому-то первое полугодіе IV-го кл. нельзя посвятить *систематическому* изученію геометрическихъ построеній. Это систематическое изученіе слѣдуетъ начать со второго полугодія курса IV-го кл.

Въ IV-мъ кл. изъ методовъ рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе можно было-бы пройти методъ геометрическихъ мѣстъ, методъ выпрямленія и симметріи и дать ученикамъ понятіе о радикальныхъ осяхъ. Удобно соединить методъ выпрямленія и методъ симметріи. Я думаю, если позволятъ время и силы, издать описаніе этихъ методовъ. Въ этомъ классѣ полезно упражнять учениковъ въ рѣшеніи возможно большого числа задачъ, гдѣ фигурируютъ вписанные, описанные и внѣвписанные круги.

Въ V-мъ кл. нужно пройти способы простого и параллельнаго перенесенія и начать способъ подобія, который, по его важности и обширности примѣненія, слѣдуетъ пройти возможно обстоятельнѣе, посвятивъ ему еще первую четверть VI-го кл. Въ этомъ же (въ V-мъ) классѣ слѣдуетъ продолжать упражненіе учениковъ въ рѣшеніи задачъ, гдѣ фигурируютъ вписанные, описанные и внѣвписанные круги. Остается второе полугодіе VI-го класса. Это полугодіе слѣдуетъ употребить на сравнительное изученіе пройденыхъ методовъ по отношенію къ нѣкоторымъ задачамъ. Именно, избирая различныя задачи и рѣшая ихъ, если это возможно, различными методами, путемъ сравненія заключаемъ о большемъ или меньшемъ преимуществѣ въ каждомъ изъ этихъ случаевъ того или другого метода. Я между прочимъ для этой цѣли бралъ такую задачу: „построить треугольникъ по периметру и двумъ угламъ“. Эту задачу рѣшалъ я съ учениками методомъ спрямленія, методомъ подобія и, пользуясь знаніемъ свойства внѣвписаннаго относительно какой нибудь стороны круга. Задачъ на подобныя сравненія слѣдуетъ пройти возможно больше, что исполнимо, если впродолженіе курсовъ IV-го, V-го классовъ и перваго полугодія VI-го ученики вполнѣ освоились съ методами рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

Наконецъ курсъ VII-го кл. долженъ быть посвященъ проэктивному черченію, на которое, полагаю, времени отдѣлено совершенно достаточно.

Такъ должно, какъ мнѣ кажется, вести преподаваніе черченія въ реальныхъ училищахъ. Можно ли достичь результатовъ, намѣченныхъ министерствомъ народнаго просвѣщенія, представляю судить болѣе опытнымъ меня, болѣе меня компетентнымъ. Я думаю, что это трудно.

А очень желательно было-бы, чтобы ученики умѣли рѣшать задачи на построеніе. Матеріалъ этотъ представляетъ хорошую гимнастику ума, если можно такъ выразиться, и лучше всего закрѣпляетъ въ памяти тѣ геометрическія свѣдѣнія, которыя уже пріобрѣтены.

Кромѣ того слѣдуетъ, повторяю, не упускать технической стороны дѣла.

М. Добровольскій (Воронежъ).

IX-й съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей.

(*Продолженіе**).

8-го января состоялось соединенное засѣданіе съѣзда съ Имп. Моск. Общ. Испытателей природы, въ которомъ были сдѣланы сообщенія: А. И. Воейковымъ: „О температурѣ почвы, воды и воздуха", Н. Д. Зелинскимъ: „Къ вопросу о происхожденіи сѣроводорода въ Черномъ морѣ и одесскихъ лиманахъ" и А. П. Павловымъ: „Геологическія причины, обусловливающія рельефъ равнинныхъ мѣстностей и различіе въ формѣ склоновъ рѣчныхъ долинъ".

9-го января состоялось соединенное засѣданіе съѣзда съ Московскимъ Математическимъ Обществомъ по случаю исполнившагося двадцатипятилѣтія Общества. Въ этомъ засѣданіи президентъ Общества, проф. Н. В. Бугаевъ произнесъ рѣчь, въ которой сдѣлалъ краткій очеркъ прогресса математическихъ знаній въ Россіи за послѣднее тридцатилѣтіе и отношенія математики къ остальнымъ областямъ знанія. 30 лѣтъ тому назадъ „въ пяти русскихъ университетахъ въ каждомъ чистая „математика была представлена однимъ и рѣдко двумя преподавателями. На профес„сора падалъ непосильный трудъ одновременно излагать свою науку и слѣдить за ея „быстрымъ развитіемъ..... Въ Россіи не было ни одного математическаго журнала. „Ученымъ нашимъ приходилось помѣщать свои статьи въ иностранныхъ изданіяхъ, „писать на иностранныхъ языкахъ. Это не всегда удобно. Иностранная литература „завалена большимъ числомъ изслѣдованій. Тамошнимъ ученымъ самимъ нужно „дожидаться очереди въ помѣщеніи своихъ трудовъ. Наука свободна. Она не выно„ситъ тѣхъ путъ, которыми связываютъ ее чужой языкъ и чужая среда. По всей Рос„сіи не существовало ни одного математическаго общества. Прошло тридцать „лѣтъ и картина во многомъ мѣняется къ лушему". Не смотря, однако, на это улучшеніе, настоящее положеніе оставляетъ еще многаго желать. Московскому Математическому Обществу не хватаетъ средствъ даже для изданія одного тома „Математическаго Сборника" въ годъ. Остается терпѣливо ждать и надѣяться „что мате„матикѣ и математическимъ наукамъ когда нибудь повезетъ въ Россіи, въ формѣ „живого и плодотворнаго содѣйствія не только правительственныхъ, но и обществен„ныхъ сферъ. Эта надежда основывается на твердой вѣрѣ, что, разрабатывая нашу „науку, мы служимъ культурному развитію нашей страны".—Исторіи самаго общества лекторъ коснулся лишь слегка. Изъ 14-и членовъ—учредителей Мат. Общества половины уже нѣтъ въ живыхъ. Скончались Н. Д. Брашманъ, А. Ю. Давидовъ, А. В. Лѣтниковъ, Н. Н. Алексѣевъ, К. М. Петерсонъ и С. А. Юрьевъ. Дѣятельность Московскаго Общества „отличалась скромностью и серьезностью.... Общество стреми„лось къ тому, чтобы математикъ осуществлялъ не ученаго бухгалтера и счетчика, а „образованнаго философа, не теряющаго связи своей науки съ другими областями „знаній и сознающаго, что въ точныхъ законахъ, выражающихся числомъ и мѣрой, „проявляются глубокія тайны міровой жизни и міровой исторіи".—Вслѣдъ за рѣчью проф. Н. В. Бугаева Секретарь Общества, проф. Б. К. Млодзѣевскій прочелъ „Историческій очеркъ дѣятельности Московскаго Математическаго Общества," а проф. Н. Е. Жуковскій изложилъ „Значеніе геометрическаго истолкованія въ теоретической механикѣ".—Послѣ этихъ сообщеній прочтены были многичисленные привѣтственные адресы отъ университетовъ, другихъ высшихъ учебныхъ заведеній и многочисленныхъ ученыхъ обществъ.

Въ тотъ же день происходило соединенное засѣданіе секцій агрономіи, минералогіи и геологіи.

Наиболѣе содержательными были засѣданія секцій.

Секція физики.—*1-е засѣданіе 5 января.* Были сдѣланы сообщенія: „О варіаціи выраженія электростатической энергіи"—проф. Н. Н. Шиллеромъ, „Интерференція электрическихъ волнъ"—проф. П. А. Зиловымъ, „Къ теоріи размѣрности электрическихъ количествъ"—О. А. Гольдгаммеромъ. Проф. Н. Пильчиковъ демонстрировалъ фотополяриметръ Корню и изложилъ результаты, полученные помощью этого

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 183.

прибора на метеорологической обсерваторіи Харьковскаго университета по отношенію къ поляризаціи атмосферы луной. Количество поляризованнаго свѣта возрастаетъ отъ новолунія до полнолунія и убываетъ отъ полнолунія до новолунія. Что-же касается до спектральной поляризаціи неба, то возрастаніе и убываніе напряженности поляризаціи атмосферы рѣзче всего происходитъ въ менѣе преломляемыхъ лучахъ.—Проф. А. П. Соколовъ сдѣлалъ сообщеніе „Объ электролизѣ воды", въ которомъ далъ опытное доказательство электролиза воды произвольно малыми электродвижущими силами. Приборъ состоитъ изъ стекляной трубки, согнутой въ видѣ буквы O со впаянными въ нее двумя круглыми платиновыми электродами, вблизи которыхъ помѣщены платиновыя острія. Если соединить электроды съ элементомъ, а острія съ чувствительнымъ электрометромъ, то выдѣленный на катодѣ водородъ диффундируетъ въ жидкости и, достигнувъ ближайшаго острія, поляризуетъ его отрицательно, тогда какъ кислородъ поляризуетъ положительно остріе у анода, что и обнаруживается электрометромъ. Такимъ образомъ удается доказать разложеніе воды уже отъ 0,002 Даніеля.

2-е засѣданіе 5-го января. — Проф. А. Г. Столѣтовъ демонстрировалъ дифракціонные спектры отъ плоской и вогнутой рѣшетокъ Роланда, а проф. В. С. Щегляевъ—опыты Тесла съ помощью снаряда Дюкрете. Е. И. Брюсовъ демонстрировалъ электрическіе разряды въ трубкахъ безъ электродовъ, а П. Н. Лебедевъ произвелъ рядъ опытовъ съ сильными перемѣнными токами.

3-е засѣданіе 6-го января.—Сообщенія дѣлали 1) проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскій: „Фотометрическая шкала." Шкала эта состоитъ изъ ряда плитокъ изъ смѣсей гипса съ сажей въ различныхъ пропорціяхъ. Для опредѣленія относительной свѣтлоты двухъ поверхностей ихъ сравниваютъ со шкалой и находятъ такія двѣ пластинки шкалы, которыя отражаютъ столько же свѣта, сколько и изслѣдуемыя поверхности.— 2) Проф. Н. П. Слугиновъ далъ формулы для опредѣленія продолжительности затвердѣванія и плавленія жидкости, находящейся въ цилиндрическомъ или сферическомъ сосудѣ.—3) Кн. Б. Б. Голицынъ сообщилъ „О состояніи матеріи вблизи критической точки".—4) Проф. П. В. Преображенскій: „Узловыя линіи на перепонкахъ". Бумажный листъ смачиваютъ водой и, положивъ его на стекло, заставляютъ воду скатываться въ различныхъ направленіяхъ, а затѣмъ накладываютъ его на рамку, намазанную крахмаломъ. По высыханіи получается равномѣрно-натянутая перепонка, откликающаяся на звукъ органныхъ трубъ, высокихъ камертоновъ и, особенно, мѣдныхъ пластинокъ, употребляемыхъ для хладніевыхъ фигуръ. Теорія показываетъ, что перемѣщеніе, перпендикулярное къ поверхности пластинки, есть сумма періодическихъ функцій. При сообщеніи демонстрировались фотографическіе снимки узловыхъ линій на квадратной перепонкѣ.—5) Проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскій дополнилъ свое первое сообщеніе, приведя еще одинъ способъ составленія нормальной шкалы свѣтлости. Этотъ „мозаичный методъ" заключается въ томъ, что пластинка составляется изъ N брусковъ, изъ которыхъ n бѣлыхъ и p черныхъ, такъ что $N = n + p$. Мѣняя отношеніе $n:p$ и взаимное расположеніе брусковъ, можно получить рядъ пластинъ, представляющихъ всевозможныя градаціи свѣтлости, если разсматривать ихъ на большомъ разстояніи или чрезъ обращенную подзорную трубу.

4-е засѣданіе 8-го января. — Сообщенія дѣлали 1) Н. П. Казанкинъ „О капиллярныхъ свойствахъ соляныхъ растворовъ." Референтъ нашелъ, что 1) молекулярное давленіе въ растворахъ твердыхъ тѣлъ въ жидкостяхъ есть сумма молекулярнаго давленія растворителя и осмотическаго давленія раствора при прочихъ равныхъ условіяхъ; 2) разность поверхностныхъ натяженій раствора и растворителя находится въ соотношеніи съ упругостью ихъ насыщеннаго пара, аналогичномъ закону van't-Hoff'a; 3) т. наз. коэффиціентъ контракціи раствора стоитъ въ простомъ соотношеніи съ коэффиціентомъ сжимаемости раствора и осмотическимъ давленіемъ и 4) измѣненія поверхностнаго натяженія раствора и растворителя съ температурой удовлетворительно объясняются съ этой же точки зрѣнія.—2) Проф. Н. Д. Пильчиковъ: „Къ вопросу о поляризаціи электродовъ." По Липману 1) поверхностное натяженіе, будучи функціей только лишь разности потенціаловъ, не зависитъ отъ свойствъ электролита и 2) металлы не могутъ быть поляризованы въ своихъ растворахъ. Однако опыты показали, что капиллярный электрометръ функціонируетъ одинаково хорошо, налита ли въ него сѣрная кислота или растворъ какой либо ртутной соли, что необъяснимо изъ двухъ вышеприведенныхъ законовъ. Далѣе, по Пелла всякій металлъ въ растворѣ любой своей соли не имѣетъ разности потенціаловъ по отношенію къ этой послѣдней. Однако въ такой системѣ наблюдаются и явленіе Пельтье и тер-

моэлектрическіе токи, что доказываетъ скачекъ потенціала при переходѣ изъ металла въ жидкость.—3) Проф. Н. Н. Шиллеръ: „О предполагаемомъ вліяніи капиллярной поверхности на упругость пара". Приведя нѣкоторые пункты изъ теоретическихъ выводовъ, доказывающихъ уменьшеніе упругости пара вблизи капиллярныхъ поверхностей, референтъ, замѣтилъ, что пункты эти даютъ поводъ къ сомнѣніямъ въ томъ отношеніи, что при вычисленіяхъ не берутся въ разсчетъ всѣ взаимно уравновѣшивающіяся силы, именно игнорируется реакція жидкости противъ капиллярнаго давленія. Вообще изъ условій равновѣсія и свойствъ обратимыхъ процессовъ нельзя выводить добавочныхъ кинематическихъ условій къ тѣмъ, кои уже положены въ основаніе условій равновѣсія.—4) А. Х. Репманъ сообщилъ о гальванической батареѣ съ алюминіемъ и о „ортотропѣ",—приборѣ, служащемъ для превращенія тока неизвѣстнаго направленія въ токъ всегда одного и того же направленія.—5) П. П. Борисовъ: „О критическомъ состояніи растворовъ твердыхъ тѣлъ".

5-е засѣданіе 8-10 января.—Все это засѣданіе было посвящено демонстраціи опытовъ Герца П. Н. Лебедевымъ. На этомъ же засѣданіи постановлено было отправить телеграмму вдовѣ скончавшагося Герца и Бонскому университету.

6-е засѣданіе 9-10 января.— Сообщенія дѣлали: 1) В. П. Пашковъ: „Дѣйствіе свѣта на электрическое сопротивленіе растворовъ". Измѣренія референта обнаружили, что сопротивленіе раствора іодной ртути въ ацетонѣ увеличивается подъ вліяніемъ свѣта; увеличеніе это совершается по нѣкоторой кривой съ рѣзкимъ переломомъ въ одной точкѣ. Въ затемненномъ растворѣ наблюдается обратное измѣненіе. Въ этомъ видна нѣкоторая аналогія съ селеномъ.—2) Проф. Н. Н. Шиллеръ: „О вліяніи электрическихъ силъ на измѣненіе упругости насыщеннаго пара". Сообщеніе это стоитъ въ связи съ предыдущимъ сообщеніемъ проф. Шиллера на 4-мъ засѣданіи. Разбирая теоретическія доказательства измѣненія упругости насыщеннаго пара, референтъ обнаруживаетъ, что измѣненія эти не являются необходимымъ слѣдствіемъ существующихъ приложенныхъ силъ, ибо условія равновѣсія системы, условія обращаемости круговыхъ процессовъ, воображаемыхъ при доказательствахъ, и условія взаимной эквиваленціи работъ приложенныхъ силъ удовлетворяются безъ допущенія измѣненія упругости.—3) Проф. А. П. Соколовъ: „Объ электролизѣ воды" (2-е сообщеніе). Авторъ опредѣляетъ опытно по двумъ способамъ предѣльную электродвижущую силу поляризацій въ водѣ при различныхъ давленіяхъ гремучаго газа. По первому способу наблюдались пузырьки водорода, отдѣляющіеся съ платиноваго острія-катода. Анодомъ служила большая платиновая пластинка. Въ вольтаметрѣ особымъ приспособленіемъ устанавливалось опредѣленное давленіе кислорода. Оказалось, что когда это давленіе $p_0 = {}^1/_{40}$ mm ртути, пузырьки водорода не выдѣляются на анодѣ при электродвижущей силѣ = 0,62 volt. По формулѣ Гельмгольца.

$$E = E_0 + 3MG_{10}\, p,$$

гдѣ p — давленіе гремучаго газа, M = 0,01433, получается E_0 = 0,67 volt., тогда какъ у Гельмгольца E_0 = 1,587 volt. По второму способу наблюдалось максимальное давленіе гремучаго газа, полученнаго при разложеніи воды данною электродвижущею силой. Получается E_0 = 1,132 volt. Авторъ не можетъ объяснить причины такого разногласія выводовъ.—4). П. Н. Лебедевъ: „Механическое дѣйствіе электрическихъ волнъ на резонаторы".

7-е засѣданіе 9-10 января.—Сообщенія дѣлали 1) Засл. проф. Н. А. Любимовъ: „Къ физикѣ падающей и брошенной системы" *). Кромѣ того референтъ демонстрировалъ нѣкоторые приборы и между прочимъ снарядъ для анализа стробоскопическихъ изслѣдованій, устроенный по идеѣ проф. Любимова механикомъ Новороссійскаго университета I. А. Тимченко, а также сообщилъ отъ имени завѣдующаго Павловской магнитной обсерваторіей Э. Е. Лейста о новомъ фактѣ, выведенномъ имъ изъ сравненія магнитныхъ наблюденій въ максимальныя приливо-отливныя эпохи. Оказывается, что въ тѣ новолунія, когда разница между склоненіемъ солнца и склоненіемъ луны меньше градуса, т. е. когда бываютъ наиболѣе сильные приливы и отливы, въ Павловскѣ, по наблюденіямъ за 1889—1892 гг., замѣчаются значительныя колебанія въ силѣ земного магнитизма. Около полуночи полная сила на 0,0008

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физ." № 181, стр. 2—5.

mg. mm. sec. меньше нормальной, около полудня—на 0,0006 mg. mm. sec. больше. Измѣняется главнымъ образомъ вертикальная слагающая. Такъ какъ опредѣленія дѣлаются по вѣсовому способу, то г. Лейстъ приписываетъ ихъ измѣненію силы тяжести на землѣ.—2) Проф. И. И. Боргманъ демонстрировалъ лекціонную динамо-машину, устроенную по его указанію механикомъ С.-Петерб. университета В. Л. Франценомъ. Это шунтовая динамо, дающая одновременно постоянный токъ, систему двухфазныхъ перемѣнныхъ токовъ и систему трехфазныхъ перемѣнныхъ токовъ.—3) Проф. А. Г. Столѣтовъ демонстрировалъ біенія ряда камертоновъ съ химической гармоникой.—4) П. Н. Лебедевъ демонстрировалъ приборъ Фрелиха.

8-е засѣданіе 10-го января, совмѣстно съ подсекціей метеорологіи и геофизики.—Проф. А. Г. Столѣтовъ прочелъ привѣтствіе проф. Гельсингфорскаго университета Лемстрёма, а Б. И. Срезневскій предложилъ желающимъ записаться въ члены-учредители Русскаго Метеорологическаго Общества. Затѣмъ дѣлали сообщенія: 1) Проф. А. В. Клоссовскій: „Описаніе обсерваторіи Новороссійскаго университета". Были демонстрированы виды обсерваторіи, отдѣльные приборы; особенное вниманіе референтъ обратилъ на анемографъ и дождеграфъ Тимченко.—2) Проф. А. В. Клоссовскій: „О весьма важномъ дополненіи въ центробѣжной машинѣ", сдѣланномъ механикомъ Тимченко. Дополненіе заключается въ томъ, что особая система чувствительныхъ рычаговъ даетъ возможность измѣрять (въ вѣсовыхъ единицахъ) напряженіе центробѣжной силы въ зависимости отъ массы вращающагося тѣла, его скорости и величины радіуса вращенія. На томъ же приборѣ можно демонстрировать расширеніе тѣлъ отъ теплоты. По предложенію проф. Пильчикова и проф. Боргмана секція рѣшила выразить г. Тимченко благодарность за его работы.—3). Акад. Н. Н. Бекетовъ: „Объ одной изъ возможныхъ причинъ увеличенія молекулярной электропроводности соляныхъ растворовъ". Какъ извѣстно, явленіе это объясняется диссоціаціей частицъ соли на іоны (гипотеза Арреніуса). Но перенесеніе іоновъ черезъ растворъ совершается необходимо посредствомъ химическаго обмѣна съ частицами воды; продукты этого обмѣна,—соляная кислота и ѣдкій натръ—увеличиваютъ проводимость; увеличеніе тѣмъ больше, чѣмъ дальше другъ отъ друга частицы соли, т. е. чѣмъ слабѣе растворъ, ибо время существованія продуктовъ обмѣна тѣмъ продолжительнѣе, чѣмъ больше частицъ воды на пути тока.—4) М. А. Рыкачевъ демонстрировалъ универсальный астрономическій и магнитный походный инструментъ.—5) О. Д. Хвольсонъ демонстрировалъ свой актинометръ.—6) В. А. Михельсонъ: „Примѣненіе ледяного калориметра Бунзена къ актинометріи". Рефератъ будетъ напечатанъ въ Журналѣ Р. Ф. Хим. Общества.—7) Б. И. Срезневскій демонстрировалъ на экранѣ фотографіи снѣжинокъ.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Вліяніе давленія на температуру плавленія. Какъ извѣстно, температура плавленія тѣла зависитъ отъ давленія. Если объемъ тѣла при переходѣ его изъ твердаго состоянія въ жидкое увеличивается, то увеличеніе давленія повышаетъ точку плавленія, если же тѣло плавится, сокращаясь въ объемѣ, то увеличеніе давленія дѣйствуетъ обратно. Г. de-Visser (Recueil d. Trav. Chim. d. Pays-Bas, 1893, стр. 154) описалъ простой приборъ, дающій возможность демонстрировать повышеніе точки плавленія тѣлъ при увеличеніи давленія. Берется кусокъ толстостѣнной капиллярной трубки (просвѣтъ ок. 1 mm, толщина стѣнокъ 6 mm), одинъ конецъ ея запаивается, а другой оттягивается такъ, чтобы стѣнки трубки остались возможно толстыми и чтобы длина полученной трубки не превосходила 15 cm. Трубка эта наполняется изслѣдуемымъ веществомъ, удобнѣе всего уксусной кислотой. Для этого оття-

нутый конецъ трубки погружаютъ въ кислоту и нагрѣваніемъ выгоняютъ изъ нея воздухъ. Затѣмъ, не вынимая конца трубки изъ кислоты, трубку охлаждаютъ ватой, смоченной эфиромъ, пока вошедшая въ нее кислота не затвердѣетъ. Такъ какъ уксусная кислота при затвердѣваніи сжимается, то въ трубку входитъ новое количество кислоты. Тогда вынимаютъ конецъ трубки изъ кислоты, охлаждаютъ ее еще и запаиваютъ оттянутый кончикъ. Если подвѣсить на нити такую трубку въ стаканъ съ водою и медленно нагрѣвать послѣднюю, то расширеніе уксусной кислоты производитъ такое давленіе, что трубку можно нагрѣть на 40° выше температуры плавленія уксусной кислоты и послѣдняя не расплавится. Судя по этому, въ трубкѣ развивается давленіе около 1000 атмосферъ. *В. Г.*

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Сборникъ геометрическихъ задачъ. Составилъ *Н. Хайловъ.* Преподаватель математики и физики въ земск. женск. гимназіи во Владимірѣ на Клязьмѣ. Изданіе автора. Владиміръ. 1894. Ц. 50 к.

Акустика. *Н. Слугиновъ.* Стр. 129—175. Казань. 1894.

Искусственные способы рѣшенія уравненій второй степени со многими неизвѣстными. Для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ *Д. В. Агаповъ.* Оренбургъ. 1894. Ц. 60 к.

Рѣшеніе нѣкоторыхъ геометрическихъ задачъ помощью теоремы Агапова: во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ произведеніе катетовъ равно произведенію полупериметра его на разность между суммою катетовъ и гипотенузы. Для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ *Д. В. Агаповъ.* Оренбургъ. 1894. Ц. 35 к.

Новая тригонометрія. Рѣшеніе треугольниковъ помощью теоремы Агапова: произведеніе разности между полупериметромъ и стороною треугольника на тангенсъ половины угла, противолежащаго этой сторонѣ, есть величина постоянная для каждаго треугольника, равная радіусу круга, вписаннаго въ треугольникъ. 45 случаевъ. Для старшихъ классовъ среднихъ учебн. заведеній. Составилъ *Д. В. Агаповъ.* Оренбургъ. 1894. Ц. 85 к.

Подробное рѣшеніе и объясненіе типическихъ задачъ по ариѳметикѣ. Для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ *Д. В. Агаповъ.* Оренбургъ. 1894. Ц. 50 к.

Какъ построить динамомашину (генераторъ или электродвигатель) въ одну лошадиную силу? Переводъ съ измѣненіями соч. *Ватсона:* How to make a one-horse power motor or dynamo? *А. Л. Гершуна.* Спб. Изданіе редакціи журнала „Электричество". 1894.

РЯДЫ СЪ ПОСТОЯННЫМЪ ИЗБЫТКОМЪ.

Тема для сотрудниковъ.

Въ какомъ нибудь ряду

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

отношеніе какого нибудь члена къ суммѣ смежныхъ членовъ

$$\frac{u_n}{u_{n-1} + u_{n+1}}$$

назовемъ *ариѳметическимъ избыткомъ* ряда.

Квадратъ какого нибудь члена безъ произведенія смежныхъ членовъ

$$u_n^2 - u_{n-1}\,u_{n+1}$$

назовемъ геометрическимъ избыткомъ.

Особеннаго интереса заслуживаютъ ряды съ постоянными избытками. Къ такимъ рядамъ принадлежатъ ариѳметическая и геометрическая прогрессіи. Существуютъ ли и другіе ряды съ постоянными избытками? Для рѣшенія этого вопроса прежде всего нужно доказать три теоремы.

Первая теорема: если ариѳметическій избытокъ есть величина постоянная, то геометрическій избытокъ есть также величина постоянная.

Вторая теорема—обратная.

На основаніи этихъ двухъ теоремъ задача приводится къ нахожденію ряда съ постояннымъ ариѳметическимъ избыткомъ.

Третья теорема: если даны два ряда съ однимъ и тѣмъ же ариѳметическимъ избыткомъ, то самое общее выраженіе ряда, имѣющаго тотъ же ариѳметическій избытокъ, получится, когда мы данные ряды умножимъ на нѣкоторые множители и сложимъ или вычтемъ соотвѣтственные члены.

Изъ этой теоремы и вытекаетъ рѣшеніе задачи.

Если ариѳметическій избытокъ равенъ $^1/_2$, то самое общее выраженіе искомаго ряда приводится къ ариѳметической прогрессіи.

Если ариѳметическій избытокъ не равенъ половинѣ, то самое общее выраженіе ряда получится, если мы сложимъ или вычтемъ соотвѣтственные члены двухъ геометрическихъ прогрессій, знаменатели которыхъ суть числа обратныя.

Въ заключеніе можно найти зависимости между первымъ членомъ ряда, послѣднимъ членомъ, числомъ членовъ, ариѳметическимъ избыткомъ, геометрическимъ избыткомъ и суммою членовъ.

В. Ермаковъ (Кіевъ).

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ $189^{92}/_{93}$ Г.

Одесскій Учебный Округъ.

Ананьевская гимназія.

По алгебрѣ.—Первый членъ ариѳметической прогрессіи $= 2{,}5$, а разность ея равна такой дроби, имѣющей числителемъ 9, что если зна-

менателя ея умножить на 8, то величина дроби увеличится на $3^3/_5$.— Найти сумму пятнадцати членовъ прогрессіи.

По геометріи.—Опредѣлить объемъ правильной пятиугольной пирамиды, въ которой сторона основанія $a=14,13$ и уголъ между боковымъ ребромъ и плоскостью основанія $= 36^0$.

Бердянская гимназія.

По алгебрѣ. — Найти четыре числа, подчиненныя слѣдующимъ условіямъ: первыя три числа составляютъ геометрическую прогрессію, а послѣднія три (т. е. 2-е, 3-е и 4-е) — ариѳметическую; сумма крайнихъ чиселъ (1-го и 4-го) $= 8$, и сумма среднихъ чиселъ (2-го и 3-го)$=7\,^1/_2$.

По геометріи.—Въ плоскости треугольника ABC проведена прямая линія xy, параллельная сторонѣ BC, на растояніи отъ нея, равномъ высотѣ h треугольника, соотвѣтствующей той же сторонѣ. Опредѣлить объемъ v тѣла, происшедшаго отъ вращенія треугольника ABC около оси xy, если извѣстны углы B, C и высота h. Вычислить v, полагая уголъ B равнымъ $70^0 28' 30''$, уголъ C равнымъ $79^0 31' 30''$, а h равнымъ $10\sqrt[3]{3}$.

Болградская гимназія.

По алгебрѣ.—Въ одной школѣ болѣе 100, но менѣе 300 учениковъ. Если поставить учениковъ въ ряды такъ, чтобы въ каждомъ ряду было по 13 человѣкъ, то останется 9 учениковъ; если же разставить учениковъ такъ, чтобы въ каждомъ ряду было по 17 человѣкъ, то останется 14 учениковъ. Сколько учениковъ въ школѣ?

По геометріи.—Конусъ равновеликъ правильной треугольной пирамидѣ, ребро которой равно 8 фут., а сторона основанія равна 5 фут. Опредѣлить высоту конуса и уголъ наклоненія образующей къ основанію, полагая радіусъ основанія конуса равнымъ 2,4 фут.?

Екатеринославская гимназія.

По алгебрѣ.—Число рублей капитала представляетъ наименьшее изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 36 и на 100, даютъ послѣдовательно остатки, равные квадратнымъ корнямъ изъ соотвѣтственныхъ дѣлителей. Капиталъ, будучи пущенъ въ оборотъ на сложные проценты, черезъ 12 лѣтъ обратился въ 864 руб. 98 коп. По сколько процентовъ находился капиталъ въ обращеніи?

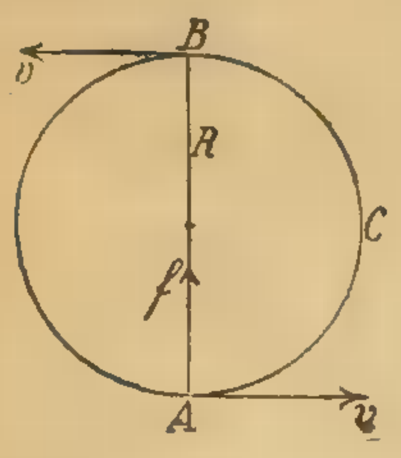
По геометріи.—Черезъ точку, дѣлящую діаметръ круга въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, проведена перпендикулярная къ нему хорда. Опредѣлить число градусовъ, минутъ и секундъ въ каждой изъ двухъ дугъ, на которыя раздѣлилась окружность упомянутой хордой.

ЗАДАЧИ.

№ 44. Масса m движется равномѣрно со скоростью v по окружности, радіусъ которой R, подъ вліяніемъ силы $f=\frac{mv^2}{R}$. Разсмотримъ движеніе по полуокружности ACB, на которое потребовалось время $t=\frac{\pi R}{v}$.

Импульсъ силы равенъ

$$ft=\frac{mv^2}{R}\cdot\frac{\pi R}{v}=\pi mv.$$



Фиг. 55.

Какъ видно изъ чертежа (фиг. 55), скорость перемѣнила знакъ; слѣдовательно пріобрѣтено количество движенія $2mv$. Но импульсъ силы равенъ пріобрѣтенному количеству движенія; слѣдовательно

$$\pi mv=2mv,$$

откуда $\pi=2$.

Разъяснить, гдѣ ошибка, и, избѣгая ея, вывести вѣрное равенство.

Проф. *О. Хвольсонъ* (Спб.).

№ 45. Начертить равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы периметръ всякаго вписаннаго въ него прямоугольника былъ величиной постоянной.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 46. Окружность касается непараллельныхъ сторонъ равнобочной трапеціи и дѣлитъ каждую изъ параллельныхъ сторонъ на три равныя части. Требуется 1) построить такую трапецію по данному радіусу R окружности и длинѣ a хорды, соединяющей точки касанія, и 2) вычислить ея стороны и площадь.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 47. Рѣшить уравненіе

$$(z^2-a^2)^2-4a(z^2-a)(az-1)=0.$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

№ 48. *Задача по практической геометріи.*—Провести чрезъ неприступную точку линію, параллельную данной.

NB. При рѣшеніи этой задачи можно пользоваться лишь цѣпью и кольями.

Н. С. (Тифлисъ).

№ 49. *Задача по практической геометріи.*—Найти на мѣстности равнодѣлящую угла, вершина котораго недоступна.

NB. См. предыдущую задачу.

Н. С. (Тифлисъ).

МАЛЕНЬКІЕ ВОПРОСЫ.

№ 8. Нальемъ въ стаканъ воды и погрузимъ въ воду стеклянную воронку такъ, чтобы она касалась нижнимъ, нѣсколько скошеннымъ отверстіемъ дна стакана. Вода войдетъ въ воронку черезъ нижнее от-

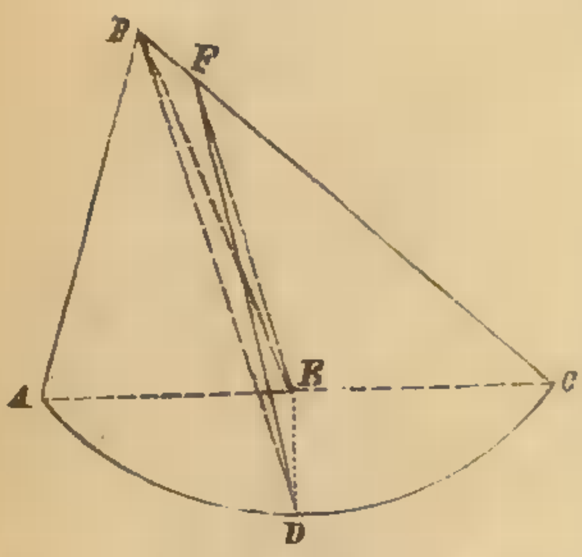
верстіе и станетъ въ ней на той же высотѣ, что и въ стаканѣ. Если станемъ теперь наливать въ воронку крѣпкой сѣрной кислоты, то замѣтимъ, что воронка сперва станетъ въ жидкости вертикально, затѣмъ, по мѣрѣ приливанія кислоты, будетъ подыматься вверхъ и плавать въ жидкости, удѣльный вѣсъ которой меньше удѣльнаго вѣса стекла.

Какъ объяснить этотъ парадоксъ?

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 563 (2 сер.). Прямою, проходящею чрезъ середину D дуги ADC, раздѣлить на двѣ равновеликія части фигуру $ABCD$, составленную двумя прямыми AB и BC и дугою ADC.



Фиг. 56.

Проводимъ $DE \perp AC$ (фиг. 56) и соединяемъ D и E съ B. Тогда, очевидно, ломанная DEB дѣлитъ нашу фигуру на двѣ равновеликія части. Проводимъ $EF \| BD$ до пересѣченія съ BC въ точкѣ F и соединяемъ F съ D. Прямая FD, очевидно, искомая, ибо $\triangle BED$ равновеликъ $\triangle$-ку BFD.

В. Ушаковъ, И. Себряковъ (ст. Усть-Медвѣдицкая); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 572 (2 сер.). Показать, что произведеніе

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

можетъ быть представлено въ видѣ суммы трехъ квадратовъ.

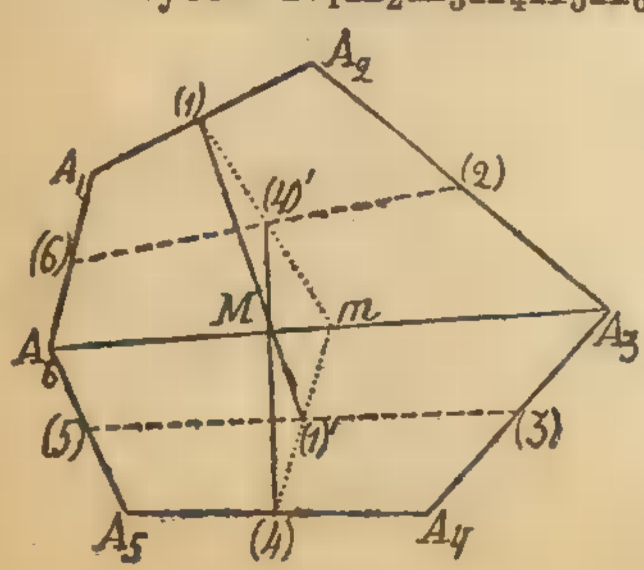
Раскрывъ скобки, получимъ:

$$a^4b^2+a^2b^4+3a^2b^2c^2+b^4c^2+b^2c^4+a^4c^2+a^2c^4=$$
$$=c^2(a^4+b^4+a^2b^2+2a^2b^2+2a^3b+2ab^3)+a^2(c^4-2abc^2+a^2b^2)+b^2(c^4-2abc^2+a^2b^2)=$$
$$=c^2(a^2+b^2+ab)^2+a^2(c^2-ab)^2+b^2(c^2-ab)^2.$$

П. Бѣловъ (с. Знаменка); *С. Адамовичъ* (с. Спасское).

№ 155 (1 сер.). Пусть точки (1),(2),(3),(4),(5),(6) суть средины сторонъ любого плоскаго шестиугольника. Доказать, что точка встрѣчи медіанъ треугольника (1)(3)(5) совпадаетъ съ точкой встрѣчи медіанъ треугольника (2)(4)(6).

Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (фиг. 57) будутъ вершины плоскаго шестиугольника. Дѣлимъ его на два четыреугольника діагональю A_3A_6, средина которой въ точкѣ m. Прямыя $m(4)$ и $(5)(3)$ взаимно дѣлятся въ точкѣ $(1)'$ пополамъ, такъ какъ соединяютъ средины противоположныхъ сторонъ четыреугольника. Точно такъ же прямыя $m(1)$ и $(2)(6)$ взаимно дѣлятся пополамъ въ точкѣ $(4)'$. Отсюда слѣдуетъ, что прямыя $(1)(1)'$ и $(4)(4)'$, пересѣкающіяся въ точкѣ M, суть медіаны треугольника $(1)m(4)$; поэтому



Фиг. 57.

$$\overline{(1)M} = 2\overline{(1)'M} \text{ и } \overline{(4)M} = 2\overline{M(4)'}.$$

Такъ какъ (1)(1)' есть медіана треугольника (1)(3)(5), а (4)(4)'— медіана треугольника (2)(4)(6), то изъ полученныхъ равенствъ слѣдуетъ, что M есть общая точка пересѣченія медіанъ треугольниковъ (1)(3)(5) и (2)(4)(6).

С. Шатуновскій (Екатеринославъ).

№ 203 (1 сер.). Найти предѣлъ суммы

$$\frac{1}{a+b\sqrt{n}} + \frac{1}{a+b\sqrt{2n}} + \ldots\ldots + \frac{1}{a+b\sqrt{pn}} + \ldots\ldots + \frac{1}{a+b\sqrt{(n-1).n}} + \frac{1}{a+bn}$$

при возрастаніи n до безконечности.

Обозначимъ эту сумму черезъ $\sum\limits_{p=1}^{p=n} \frac{1}{a+b\sqrt{pn}}$ и положимъ сначала $a=0$. Вопросъ приведется въ этомъ случаѣ къ опредѣленію предѣла выраженія $\frac{1}{b\sqrt{n}} \sum\limits_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$, что можно сдѣлать, пользуясь двумя равенствами:

$$2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}},$$

$$2\sqrt{n+1} - 2 = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots\ldots + \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

въ справедливости которыхъ легко убѣдиться, освобождая знаменатели отъ радикаловъ.

Сравнивая члены суммы $\sum\limits_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ съ соотвѣтствующими членами суммъ $2\sqrt{n}$ и $2\sqrt{n+1}-2$, находимъ

$$2\sqrt{n} > \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}} > 2\sqrt{n+1} - 2,$$

или, дѣля на $b\sqrt{n}$,

$$\frac{2}{b} > \frac{1}{b\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}} > \frac{2}{b}\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{b\sqrt{n}}.$$

Изъ этихъ неравенствъ вытекаетъ, что при $n=\infty$

$$\lim \frac{1}{b\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{2}{b}.$$

Такимъ образомъ, если $a=0$, то предѣлъ предложенной суммы равенъ $\frac{2}{b}$.

Если же a неравно нулю, то изъ равенства

$$\frac{1}{a+b\sqrt{pn}} = \frac{1}{b\sqrt{pn}} - \frac{a}{b\sqrt{pn}(a+b\sqrt{pn})}$$

получимъ

$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{a+b\sqrt{pn}}=\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{b\sqrt{pn}}-\frac{a}{b\sqrt{n}}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{\sqrt{p}(a+b\sqrt{pn})}.$$

Изъ двухъ суммъ Σ, входящихъ въ составъ второй части этого равенства, первая при $n=\infty$ имѣетъ конечный предѣлъ $\frac{2}{b}$. Начиная съ нѣкотораго конечнаго достаточно большого p, численная величина каждаго слагаемаго второй изъ этихъ двухъ суммъ меньше численной величины соотвѣтствующаго слагаемаго первой, поэтому, при $n=\infty$, $\lim\frac{a}{b\sqrt{n}}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{\sqrt{p}(a+b\sqrt{pn})}=0$, слѣдовательно и при a неравномъ нулю имѣемъ

$$\lim\left[\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{a+b\sqrt{pn}}\right]=\frac{2}{b}.$$

Мы предполагали b отличнымъ отъ нуля, но послѣднее равенство справедливо и въ случаѣ $b=0$, ибо въ этомъ случаѣ предложенная сумма приводится къ $\frac{n}{a}$ и предѣломъ имѣетъ ∞.

С. Шатуновскій (Екатеринославъ).

Математ. шутка № 1 (XV сем., стр. 116). Какъ велико наибольшее трехзначное число? Отвѣтъ 9^{9^9}.

А. Варенцовъ (Ростовъ на Д.).

NB. Было получено много невѣрныхъ отвѣтовъ. Въ большей части отвѣтовъ дается 9^{99}.

Математ. шутка № 2 (XV сем., стр. 274). Отвѣтъ $MP=R$.

Я. Тепляковъ (Радомысль); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *К. Межинскій* (Симбирскъ); *К. Зновицкій* (Кіевъ); *А. Треумовъ, Н. Кузнецовъ,* (Ив.-Вознесенскъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *П. Иванова* (Одесса) №№ 303, 356, 389, 406, 513, 528, 543 (2 сер.) ■ 22, 27, 28 (3 сер.); *С. Д—цева* (Москва) №№ 8, 19 (3 сер.); *П. Ходановича* (Кіевъ) №№ 27, 28 (3 сер.); *Г. Легошина* (с. Знаменка) № 23 (3 сер.); *В. Рюмина* (Николаевъ) №№ 27, 28, 31 (3 сер.); *С. Окулича* (Варшава) №№ 564 (2 сер.) и 2, 7, 9, 10, 12, 19, 20, 27 (3 сер.); *А. Варенцова* (Ростовъ н.-Д). №№ 493, 573 (2 сер.), и 26, 27, 29 (3 сер.) и зад. на премію проф. Хвольсона; *Н. Лукниикаго* (Полоцкъ) №№ 27, 28, 30, 31 (3 сер.); *А. Шантыря* (Полоцкъ) №№ 12, 30, 31 (3 сер.) и № 515 (2 сер.); *Л. Клеменца* (Царское село) № 3 (3 сер.); *Ф. Грекова* (Изюмъ) № 27 (3 сер.); *І. Өеодорова* (Тамбовъ) №№ 28, 29, 30, 31 (3 сер.); *С Бабанской* (Тифлисъ) №№ 537, 586, 589 (2 сер.); *Я. Блюмберга* (Рига) №№ 1, 2, 3, 4, 6, 14, 15, 19, 20, 23, 25 (3 сер.); *А. Прясловой* (Ревель) № 19 (3 сер.); *М. Пряслова* (Ревель) №№ 3, 4, 20, 22, 23, 26, 27, 28, 30, 31 (3 сер.); *К.* ■ *Ө.* (Тамбовъ) № 26 (3 сер.).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 2-го Апрѣля 1894 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

L'ASTRONOMIE

№ 3.—1894.

Vénus la belle. *C. Flammarion*.

Vénus étoile du matin et du soir le même jour. 2-го (14) февраля Венеру можно было наблюдать какъ утреннюю и вечернюю звѣзду, такъ какъ она заходила 43 минутами позже Солнца и восходила 43 минутами раньше его. Это чрезвычайно рѣдкое явленіе, повторяющееся не болѣе двухъ разъ въ столѣтіе, произошло вслѣдствіе большой разности въ склоненіи (9°) обоихъ свѣтилъ.

Sur le satellite de Neptune. *F. Tisserand*. Вскорѣ послѣ открытія Нептуна былъ открытъ его спутникъ (1847 г.). До сихъ поръ другого спутника не открыто. Въ движеніи этого спутника англійскимъ ученымъ Marth'омъ замѣчено такое обстоятельство: плоскость его орбиты медленно перемѣщается въ одномъ и томъ-же направленіи и въ теченіе 31 года ея наклоненіе къ орбитѣ Нептуна возрасло на 5° (что подтверждено и Струве). Если-бы плоскость орбиты спутника совпадала съ экваторомъ Нептуна, то не было-бы основанія такому совпаденію когда либо нарушиться. Поэтому орбита спутника должна образовать нѣкоторый уголъ съ экваторомъ Нептуна; въ такомъ случаѣ первая плоскость должна перемѣщаться такъ, чтобы уголъ ея наклоненія къ экватору оставался постояннымъ. Если на небесной сферѣ начертить кругъ, описываемый полюсомъ плоскости орбиты спутника, то центромъ такого круга будетъ полюсъ плоскости экватора Нептуна. Такимъ образомъ явится возможность опредѣлить направленіе оси Нептуна, чего нельзя достичь прямымъ наблюденіемъ, такъ какъ дискъ Нептуна видимъ подъ угломъ въ 2″ и сжатіе, еслибъ оно было и довольно значительнымъ, долго ускользало-бы отъ наблюденія.

Les idées cosmographiques de nos pères. *C. Flammarion*.

Le premier satellite de Jupiter. *E. Barnard*. Наблюдая перваго спутника Юпитера въ то время, когда онъ проэктируется на свѣтлую часть планеты, *Barnard* замѣтилъ, что онъ кажется темнымъ и раздвоеннымъ по направленію линіи, *перпендикулярной* темнымъ полосамъ Юпитера, и кажется свѣтлымъ и удлиненнымъ *параллельно* полосамъ Юпитера, когда проэктируется на темныя полосы; на фонѣ-же неба спутникъ кажется совершенно круглымъ. Для объясненія этихъ явленій *Barnard* предположилъ, что дискъ спутника имѣетъ видъ, подобный самому Юпитеру, т. е., что у него оба полушарія сѣроватаго цвѣта раздѣлены свѣтлой экваторіальной полосой и что его ось приблизительно параллельна оси Юпитера. Въ такомъ случаѣ, если онъ проэктируется на темный фонъ Юпитера, то остается видимой свѣтлая экваторіальная полоса, параллельная полосамъ Юпитера; если-же онъ проэктируется на свѣтлый фонъ, то видимы два темныхъ полушарія, т. е. онъ какъ-бы раздваивается. 19 ноября 1893 г. наблюденія въ обсерваторіи Lick'а съ увеличеніемъ въ 1000 р. вполнѣ оправдали эту гипотезу.

L'étoile double α du Centaure.

Un problème. *C. Saint-Saens*.

Application de la Météorologie à l'art militaire. *I. Plumandon*.

Société astronomique de France.

Variétés. *К. Смоличъ* (Умань).

ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

Чагану (Уральскъ). Задачу помѣстимъ. Ваше рѣшеніе задачи г. Николаева будетъ напечатано въ одномъ изъ ближайшихъ №№ въ видѣ отдѣльной статейки.

В. Рюмину (Николаевъ). Пишемъ вамъ отдѣльно.

Л. К. (Тула). Сборникъ задачъ изъ „Вѣстника“ въ свое время поступитъ въ продажу. Изъ нѣмецкихъ математическихъ журналовъ съ богатымъ отдѣломъ задачъ можемъ рекомендовать Вамъ «Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht» (Leipzig). Открытое письмо получено, но задача слишкомъ легка. Изъ послѣднихъ двухъ задачъ первая слишкомъ легка, вторую же, быть можетъ, помѣстимъ.